§ FERMIONS DESCRITOS PELO HAMILTONIANO DE DIRAC

Consideramos primeiro o caso de fermions de Dirac sem massa (neutrinos)

$$\mathcal{H}_0 = \hbar c \int d^3r\, \psi^{\dagger}(\vec{r})\, \frac{\vec{\alpha}\cdot\nabla}{i}\, \psi(\vec{r}) \,, \qquad (1)$$

onde os operadores de campo são spinores de 4 componentes $\psi_s(\vec{r})$, $\psi_s^{\dagger}(\vec{r})$, com $s = 1,2,3,4$. Eles satisfazem relações de anti-comutação do tipo

$$\{\psi_s(\vec{r}), \psi_{s'}^{\dagger}(\vec{r}\,')\} = \delta_{ss'}\, \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}\,') \equiv \langle \vec{r}s | \vec{r}\,'s' \rangle \,, \qquad (2)$$

onde temos introduzido a base $\{|\vec{r}, s\rangle\}$ do espaço de configuração.

▸ Representação chiral das matrizes de Dirac

$$\vec{\alpha} \equiv \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & -\vec{\sigma} \end{pmatrix} , \quad \gamma_5 \equiv \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} ,$$

$$\beta \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Todas são matrizes de (4×4) e $\vec{\sigma}$ é a matriz de Pauli

$$\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Expandimos os operadores de campo em operadores de criação e destruição usando orbitais de ondas planas

$$\varphi_{\vec{k}}(\vec{r}) \equiv \langle \vec{r} | \vec{k} \rangle$$

$$\psi_s(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} \langle \vec{r} | \vec{k} \rangle a_s(\vec{k}) \quad , \quad \psi_s^\dagger(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} \langle \vec{r} | \vec{k} \rangle^* a_s^\dagger(\vec{k})$$

$$\left\{ \psi_s(\vec{r}), \psi_{s'}^\dagger(\vec{r}\,') \right\} = \delta_{ss'} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}\,') = \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \langle \vec{r} | \vec{k} \rangle \langle \vec{k}' | \vec{r}\,' \rangle \times$$

$$\left\{ a_s(\vec{k}), a_{s'}^\dagger(\vec{k}') \right\}$$

$$= \delta_{ss'} \langle \vec{r} | \vec{r}\,' \rangle = \delta_{ss'} \sum_{\vec{k} \vec{k}'} \langle \vec{r} | \vec{k} \rangle \langle \vec{k}' | \vec{r}\,' \rangle \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}$$

assim :

$$\left\{ a_s(\vec{k}), a_{s'}^\dagger(\vec{k}') \right\} = \delta_{ss'} \delta_{\vec{k} \vec{k}'} = \langle s \vec{k} | s' \vec{k}' \rangle$$

Escrevamos o Hamiltoniano em termos dos operadores $a_s, a_s^\dagger$

$$-i \nabla \psi_s(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} (-i) \left[\nabla \varphi_{\vec{k}}(\vec{r}) \right] a_s(\vec{k})$$

$$= \sum_{\vec{k}} \vec{k} \langle \vec{r} | \vec{k} \rangle a_s(\vec{k})$$

$$-i \left[\vec{\alpha} \cdot \nabla \psi(\vec{r}) \right]_s = \sum_{\vec{k} s'} (\vec{\alpha} \cdot \vec{k})_{ss'} \langle \vec{r} | \vec{k} \rangle a_{s'}(\vec{k})$$

e

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \hbar c \int d^3r \sum_{\vec{k}'\vec{k}} \sum_{ss'} \langle r|\vec{k}'\rangle^* a_s^+(\vec{k}') (\vec{\alpha}\cdot\vec{k})_{ss'} \langle \vec{r}|\vec{k}\rangle a_{s'}(\vec{k})$$

usando que $\int d^3r \langle \vec{k}'|\vec{r}\rangle\langle\vec{r}|\vec{k}\rangle = \delta_{\vec{k},\vec{k}'}$

$$\boxed{\mathcal{H}_0 = \sum_{\substack{\vec{k}\\ s,s'}} \hbar c k \; a_s^+(\vec{k}) (\vec{\alpha}\cdot\hat{k})_{ss'} a_{s'}(\vec{k})} \qquad (4)$$

onde $\hat{k}$ é um vetor unitário $\hat{k} \equiv \dfrac{\vec{k}}{k}$.

Seja $\vec{\Sigma}$ a matriz:

$$\vec{\Sigma} \equiv \left(\begin{array}{c|c} \vec{\sigma} & 0 \\ \hline 0 & \vec{\sigma} \end{array}\right)$$

Estas matrizes podem ser multiplicadas por blocos, assim

$$\vec{\alpha} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & -1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \vec{\sigma} & \\ \hline & \vec{\sigma} \end{array}\right) = \gamma_5 \cdot \vec{\Sigma}$$

$$\vec{\alpha}\cdot\hat{k} = \gamma_5(\vec{\Sigma}\cdot\hat{k})$$

com $\gamma_5(\vec{\Sigma}\cdot\hat{k}) = (\vec{\Sigma}\cdot\hat{k})\gamma_5 = \vec{\alpha}\cdot\hat{k}$,

logo γ_5 e $(\vec{\Sigma}\cdot\hat{k})$ podem ser simultâneamente diagonalizadas.

Sejam $|\lambda\mu\rangle$ as autofunções comuns de γ_5 e $(\vec{\Sigma}\cdot\hat{k})$

Os autovalores de σ_5 e $(\vec{\Sigma}\cdot\hat{k})$ são ± 1

$$\sigma_5 |\lambda\mu\rangle = \mu\, |\lambda\mu\rangle \;, \quad \mu = \pm 1 \;,$$

$$(\vec{\Sigma}\cdot\hat{k}) |\lambda\mu\rangle = \lambda\, |\lambda\mu\rangle \;, \quad \lambda = \pm 1 \;.$$

É possível encontrar estes autovetores como funções explícitas de $\hat{k}$, mas por enquanto não precisaremos dessa forma explícita. Estes estados formam um conjunto completo:

$$\sum_{(\lambda,\mu)} |\lambda\mu\rangle\langle\lambda\mu| = 1 \;,$$

$$\langle\lambda\mu|\lambda'\mu'\rangle = \delta_{\lambda\lambda'}\,\delta_{\mu\mu'} \;.$$

Usamos esta relação de completeza para re-escrever o Hamiltoniano (4)

$$(\vec{\alpha}\cdot\hat{k})_{ss'} = \langle s|(\vec{\alpha}\cdot\hat{k})|s'\rangle$$

$$= \sum_{(\lambda\mu)} \langle s|(\vec{\alpha}\cdot\hat{k})|\lambda\mu\rangle\langle\lambda\mu|s'\rangle$$

$$= \sum_{(\lambda,\mu)} \langle s|\,\sigma_5(\vec{\Sigma}\cdot\hat{k})\,|\lambda\mu\rangle\langle\lambda\mu|s'\rangle$$

$$= \sum_{(\lambda\mu)} \mu\lambda\,\langle s|\lambda\mu\rangle\langle\lambda\mu|s'\rangle \;,$$

e portanto o Hamiltoniano fica:

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \hbar c \sum_{\vec{k},\lambda,\mu} \sum_{s,s'} a_s^{\dagger}(\vec{k}) \langle s|\lambda\mu\rangle \lambda\mu k \langle \lambda\mu|s'\rangle \, a_{s'}(\vec{k}) \tag{5}$$

▸ <u>Def</u>. Definimos agora novos operadores de criação e destruição:

$$a^{\dagger}(\vec{k},\lambda) \equiv \sum_s a_s^{\dagger}(\vec{k}) \langle s|\, \lambda, \mu=\lambda \rangle \,, \quad \text{(partícula)}$$

$$b^{\dagger}(\vec{k},\lambda) \equiv \sum_s a_s(-\vec{k}) \langle s| -\lambda, \mu=\lambda \rangle^{*} \quad \text{(antipartícula)}. \tag{*}$$

Seja o operador de campo:

$$\psi_s^{\dagger}(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} \langle \vec{k}|\vec{r}\rangle \, a_s^{\dagger}(\vec{k})$$

$$\sum_s \psi_s^{\dagger} \langle s|\lambda\mu\rangle = \sum_{\vec{k}} \langle \vec{k}|\vec{r}\rangle \sum_s \langle s|\lambda\mu\rangle \, a_s^{\dagger}(\vec{k})$$

$$\sum_s \sum_{\lambda\mu} \psi_s^{\dagger} \langle s|\lambda\mu\rangle\langle\lambda\mu|s'\rangle = \psi_{s'}^{\dagger}(\vec{r})$$

$$= \sum_{\vec{k}} \sum_{\lambda\mu} \langle \vec{k}|\vec{r}\rangle \sum_s \langle s|\lambda\mu\rangle \, a_s^{\dagger}(\vec{k}) \langle\lambda\mu|s'\rangle$$

$$= \sum_{\vec{k}} \sum_{\lambda} \langle \vec{k}|\vec{r}\rangle \Big\{ \langle\lambda\lambda|s'\rangle \sum_s \langle s|\lambda\lambda\rangle \, a_s^{\dagger}(\vec{k}) \; +$$

$$+ \langle -\lambda,\lambda|s'\rangle \sum_s \langle s|-\lambda\lambda\rangle \, a_s^{\dagger}(\vec{k}) \Big\}$$

$$= \sum_{\vec{k}} \sum_{\lambda} \langle \vec{k} | \vec{r} \rangle \langle \lambda\lambda | s' \rangle \, a^{+}(\vec{k},\lambda) \; +$$

$$+ \sum_{\vec{k}} \sum_{\lambda} \langle -\vec{k} | \vec{r} \rangle \langle -\lambda\lambda | s' \rangle \sum_{s} \langle s | -\lambda\lambda \rangle \, a_s^{+}(-\vec{k})$$

Temos as relações:

$$\langle -\vec{k} | \vec{r} \rangle = \langle \vec{k} | \vec{r} \rangle^{*} = \langle \vec{r} | \vec{k} \rangle$$

$$b(\vec{k},\lambda) = \sum_{s} \langle s | -\lambda,\lambda \rangle \, a_s^{+}(-\vec{k}) \quad ,$$

de onde obtemos:

$$\psi_{s'}^{+}(\vec{r}) = \sum_{\vec{k},\lambda} \left\{ \langle \vec{k} | \vec{r} \rangle \langle \lambda\lambda | s' \rangle \, a^{+}(\vec{k},\lambda) + \langle \vec{r} | \vec{k} \rangle \langle -\lambda\lambda | s' \rangle \, b(\vec{k},\lambda) \right\}$$

e para o hermiteano conjugado:

$$\psi_{s}(\vec{r}) = \sum_{\vec{k},\lambda} \left\{ \langle \vec{r} | \vec{k} \rangle \langle \lambda\lambda | s \rangle^{*} \, a(\vec{k},\lambda) + \langle \vec{k} | \vec{r} \rangle \langle -\lambda\lambda | s \rangle^{*} \, b^{+}(\vec{k},\lambda) \right\}$$

O Hamiltoniano também pode ser reescrito em termo dos novos operadores:

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \hbar c \sum_{\vec{k},\lambda} \left\{ \sum_{s s'} a_s^{+}(\vec{k}) \langle s | \lambda\lambda \rangle \, \lambda\lambda \, k \, \langle \lambda\lambda | s' \rangle \, a_{s'}(\vec{k}) \; + \right.$$

$$+ \sum_{ss'} a_s^\dagger(\vec{k})\langle s|-\lambda\lambda\rangle(-\lambda\lambda)k\langle -\lambda\lambda|s'\rangle a_{s'}(\vec{k})\Big\}$$

$$= \hbar c \sum_{\vec{k},\lambda} k\, a^\dagger(\vec{k},\lambda)\, a(\vec{k},\lambda) \; +$$

$$+ \hbar c \sum_{\vec{k},\lambda} \sum_{ss'} a_s^\dagger(-\vec{k})\langle s|-\lambda\lambda\rangle(-k)\langle -\lambda\lambda|s'\rangle a_{s'}(-\vec{k})$$

Obs. O termo constante na Hamiltoniana diverge!

$$H = \hbar c \sum_{\vec{k},\lambda} k\, a^\dagger(\vec{k},\lambda)a(\vec{k},\lambda) \; -$$

$$- \hbar c \sum_{\vec{k},\lambda} k\, b(\vec{k},\lambda)\, b^\dagger(\vec{k},\lambda)$$

Os operadores continuam sendo fermiónicos:

$$\{a(\vec{k},\lambda), a^\dagger(\vec{k}',\lambda')\} = \sum_{ss'} \langle\lambda\lambda|s\rangle\langle s'|\lambda'\lambda'\rangle \{a_s(\vec{k}), a_{s'}^\dagger(\vec{k}')\}$$

$$= \sum_{ss'} \langle\lambda\lambda|s\rangle\langle s'|\lambda'\lambda'\rangle\, \delta_{ss'}\,\delta_{\vec{k}\vec{k}'}$$

$$= \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \sum_{s} \langle\lambda\lambda|s\rangle\langle s|\lambda'\lambda'\rangle = \delta_{\lambda\lambda'}\,\delta_{\vec{k}\vec{k}'}$$

analogamente para os b:

$$\{b(\vec{k},\lambda), b^\dagger(\vec{k}',\lambda')\} = \delta_{\lambda\lambda'}\,\delta_{\vec{k}\vec{k}'}$$

assim : $\; -\, b(\vec{k}\lambda)\, b^\dagger(\vec{k}\lambda) = +\, b^\dagger(\vec{k}\lambda)\, b(\vec{k}\lambda) - 1$

O Hamiltoniano fica:

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \hbar c \sum_{\vec{k},\lambda} k \left\{ a^{\dagger}(\vec{k},\lambda) a(\vec{k},\lambda) + b^{\dagger}(\vec{k}\lambda) b(\vec{k}\lambda) - 1 \right\} \qquad (6)$$

Aparte de um termo constante, o Hamiltoniano é uma função quadrática definida positiva, que descreve um sistema independente de partículas e antipartículas. O objetivo da transformação canônica (*) é exatamente escrever o Hamiltoniano na forma (6) que é manifestamente positiva definida. Sabemos que uma transformação canônica preserva as regras de anticomutação (ou comutação).

▸ **Df.** **Definimos alguns operadores:**

i) **Operador momentum:**

$$\begin{aligned} \vec{P} &\equiv \int d\vec{r}^3\, \psi^{\dagger}(\vec{r}) \left(-i\hbar \nabla \psi(\vec{r})\right) \\ &= \sum_{\vec{k}\lambda} \hbar \vec{k} \left[a^{\dagger}(\vec{k},\lambda) a(\vec{k},\lambda) + b^{\dagger}(\vec{k},\lambda) b(\vec{k},\lambda) \right] \end{aligned} \qquad (6)$$

ii) **Operador de carga:**

$$Q \equiv \int d\vec{r}^3\, \psi^{\dagger}(\vec{r}) \psi(\vec{r}) = \sum_{\vec{k},\lambda} \left[a^{\dagger}(\vec{k},\lambda) a(\vec{k},\lambda) + b(\vec{k},\lambda) b^{\dagger}(\vec{k},\lambda) \right]$$

$$= \sum_{\vec{k},\lambda} \left[a^\dagger(\vec{k},\lambda) a(\vec{k},\lambda) - b^\dagger(\vec{k},\lambda) b(\vec{k},\lambda) + 1 \right] \qquad (7)$$

iii) Operador Helicidade:

$$h \equiv \sum_{\vec{k},\lambda} \lambda \left[a^\dagger(\vec{k},\lambda) a(\vec{k},\lambda) + b^\dagger(\vec{k},\lambda) b(\vec{k},\lambda) \right]$$
$$= \int d^3r \; \psi^\dagger(\vec{r}) (\vec{\Sigma} \cdot \hat{k}) \psi(\vec{r}) \qquad (8)$$

iv) Operador de "chiralidade"

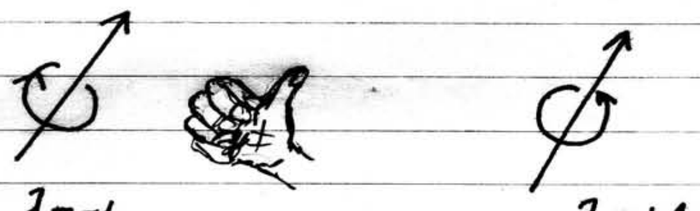
$$Q_A = \int d^3r \; \psi^\dagger(\vec{r}) \gamma_5 \psi(\vec{r})$$
$$= \sum_{\vec{k},\lambda} \lambda \left[a^\dagger(\vec{k},\lambda) a(\vec{k},\lambda) - b^\dagger(\vec{k},\lambda) b(\vec{k},\lambda) \right] \qquad (9)$$

A chiralidade de uma partícula é igual a sua helicidade, enquanto que a chiralidade de uma antipartícula é oposta à helicidade:

$a^\dagger(\vec{k},\lambda)$: operador de criação de uma partícula de momentum $\hbar\vec{k}$, carga $(+1)$, helicidade λ, e chiralidade λ.

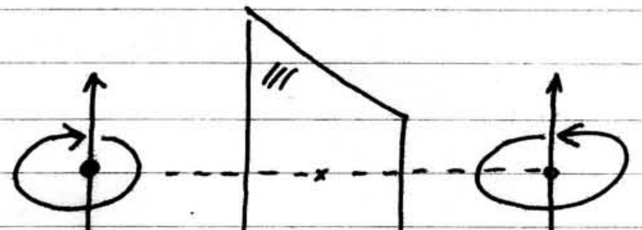
$b^\dagger(\vec{k},\lambda)$: operador de criação de uma anti-partícula de momentum $\hbar\vec{k}$, carga (-1), helicidade λ, e chiralidade $(-\lambda)$

Um campo fermiônico de Dirac com massa $m = 0$ representa um campo de neutrinos. Porém as observações experimentais mostram que só existem neutrinos de chiralidade negativa. Neutrinos tem helicidade (-1), en quanto que antineutrinos $(+1)$



$\lambda = -1$ $\qquad\qquad$ $\lambda = +1$

A falta de neutrinos com a outra chiralidade está ligada à não-conservação da paridade P nas interações fracas.

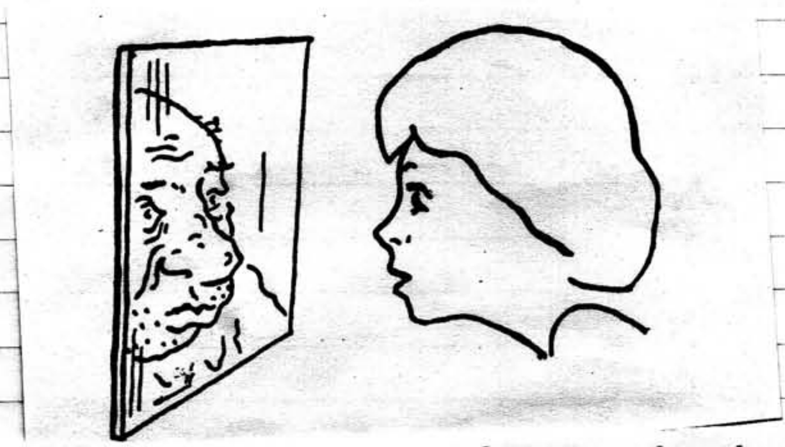


$\lambda = -1$ $\qquad\qquad$ $\lambda = 1$

neutrino $\qquad\qquad$ antineutrino

O operador de conjugação da carga (que liga partículas com antipartículas) conecta as duas chiralidades e muda o sinal da energia : $\mathcal{C}$

É o produto $\mathcal{C}P$ que continua invariante. Se definirmos uma partícula genuinamente neutra como sendo aquela cuja antipartícula é a própria partícula, por exemplo fóton, os neutrinos caem fora desta categoria.



Thus, the mirror reflection of a neutrino is a different particle—the antineutrino. Almost as if the mirror image of a beautiful young girl were that of an old bald man.

§ Fermions de Dirac com massa $m \neq 0$

Se definem com o Hamiltoniano

$$\hat{\mathcal{H}} = \hbar c \int d^3r \, \psi^\dagger(\vec{r}) \left\{ \frac{\alpha \cdot \nabla}{i} + \frac{mc}{\hbar} \beta \right\} \psi(\vec{r}) \qquad (10)$$

A matriz β não comuta com a matriz de chiralidade γ_5.

Em efeito:

$$\gamma_5 \cdot \beta = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 0 & -1 \\ \hline -1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\beta \cdot \gamma_5 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -1 \\ \hline -1 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 \end{array}\right) = -\gamma_5 \beta$$

Assim, β não é diagonal na representação chiral. Vejamos

$$\gamma_5(\beta|\lambda\mu\rangle) = -\beta(\gamma_5|\lambda\mu\rangle) = -\mu(\beta|\lambda\mu\rangle),$$

logo $(\beta|\lambda\mu\rangle)$ é autovetor de γ_5 com autovalor $(-\mu)$. Devemos portanto ter:

$$\hat{\beta}|\lambda\mu\rangle = \varphi|\lambda,-\mu\rangle$$

onde φ é um fator de fase. Também temos que

$$\beta^2 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -1 \\ \hline -1 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 0 & -1 \\ \hline -1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) = 1$$

$$\beta^2|\lambda\mu\rangle = |\lambda\mu\rangle = \beta(\beta|\lambda\mu\rangle) = \beta(\varphi|\lambda,-\mu\rangle)$$
$$= \varphi^2|\lambda\mu\rangle \implies \varphi^2 = 1, \quad \varphi = \pm 1$$

O termo extra do Hamiltoniano fica:

$$\delta\hat{H} = \int d^3r\, mc^2\, \psi^\dagger(\vec{r})\cdot\beta\,\psi(\vec{r})$$

$$= mc^2 \int d^3r \sum_{ss'} \psi_s^\dagger(\vec{r})\, \beta_{ss'}\, \psi_{s'}(\vec{r})$$

$$= mc^2 \int d^3r \sum_{ss'} \sum_{\substack{\vec{k},\lambda \\ \vec{k}',\lambda'}} \left\{ \langle\vec{k}|\vec{r}\rangle\langle\lambda\lambda|s\rangle a^\dagger(\vec{k},\lambda) + \langle\vec{r}|\vec{k}\rangle\langle-\lambda\lambda|s\rangle b(\vec{k},\lambda) \right\} \cdot \langle s|\beta|s'\rangle \cdot$$
$$\cdot \left\{ \langle\vec{r}|\vec{k}'\rangle\langle\lambda'\lambda'|s'\rangle^* a(\vec{k}',\lambda') + \langle\vec{k}'|\vec{r}\rangle\langle-\lambda'\lambda'|s'\rangle^* \times b^\dagger(\vec{k}',\lambda') \right\}$$

Analizar as somas sobre as helicidades:

$$\sum_{ss'} \langle \lambda\lambda | s \rangle \langle s | \beta | s' \rangle \langle s' | \lambda'\lambda' \rangle = I_1(\lambda, \lambda')$$

$$\sum_{ss'} \langle \lambda\lambda | s \rangle \langle s | \beta | s' \rangle \langle s' | -\lambda'\lambda' \rangle = I_2(\lambda, \lambda')$$

$$\sum_{ss'} \langle -\lambda\lambda | s \rangle \langle s | \beta | s' \rangle \langle s' | \lambda'\lambda' \rangle = I_3(\lambda, \lambda')$$

$$\sum_{ss'} \langle -\lambda\lambda | s \rangle \langle s | \beta | s' \rangle \langle s' | -\lambda'\lambda' \rangle = I_4(\lambda, \lambda')$$

Vejamos o primeiro:

$$I_1(\lambda,\lambda') = \langle \lambda\lambda | \beta | \lambda'\lambda' \rangle = \varphi \langle \lambda\lambda | \lambda', -\lambda' \rangle = 0$$

$$I_2(\lambda,\lambda') = \langle \lambda\lambda | \beta | -\lambda', \lambda' \rangle = \varphi \langle \lambda\lambda | -\lambda', -\lambda' \rangle = \varphi\, \delta_{\lambda,-\lambda'}$$

$$I_3(\lambda,\lambda') = \langle -\lambda\lambda | \beta | \lambda'\lambda' \rangle = \varphi \langle -\lambda\lambda | \lambda', -\lambda' \rangle = \varphi\, \delta_{\lambda,-\lambda'}$$

$$I_4(\lambda,\lambda') = \langle -\lambda\lambda | \beta | -\lambda'\lambda' \rangle = \varphi \langle -\lambda\lambda | -\lambda', -\lambda' \rangle = 0$$

Também:

$$\int d^3r \langle \vec{k} | \vec{r} \rangle \langle \vec{k}' | \vec{r} \rangle = \int d^3r \langle \vec{k} | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | -\vec{k}' \rangle = \delta_{\vec{k},-\vec{k}'}$$

Daí:

$$\delta \hat{H} = mc^2 \sum_{\vec{k},\lambda} \varphi \left\{ a^{\dagger}(\vec{k},\lambda)\, b^{\dagger}(-\vec{k},-\lambda) + b(-\vec{k},-\lambda)\, a(\vec{k},\lambda) \right\},$$

e o Hamiltoniano completo na representação chiral é

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{\vec{k},\lambda} \Big\{ \hbar c k \left[a^{\dagger}(\vec{k},\lambda)\, a(\vec{k},\lambda) + b^{\dagger}(\vec{k},\lambda)\, b(\vec{k},\lambda) - 1 \right] +$$

$$+ mc^2 \varphi \left[a^{\dagger}(\vec{k},\lambda)\, b^{\dagger}(-\vec{k},-\lambda) + b(-\vec{k},\lambda)\, a(\vec{k},\lambda) \right] \Big\} \qquad (11)$$

O termo extra mistura as chiralidades e os termos $(\vec{k},-\vec{k})$.

O Hamiltoniano (11) pode ser diagonalizado por uma transformação canônica (**Transformação de Bogolubov**). Definimos novos operadores:

$$\begin{cases} c(\vec{k},\lambda) = u(\vec{k},\lambda)\, a(\vec{k},\lambda) + v(\vec{k},\lambda)\, b^{\dagger}(-\vec{k},-\lambda) \\ d^{\dagger}(\vec{k},\lambda) = x(\vec{k},\lambda)\, a(\vec{k},\lambda) + y(\vec{k},\lambda)\, b^{\dagger}(-\vec{k},-\lambda) \end{cases}$$

A transformação precisa ser unitária e preservar as relações de anticomutação:

$$\{ c(\vec{k},\lambda), c^{\dagger}(\vec{k}',\lambda') \} = u(\vec{k},\lambda)\, u^{*}(\vec{k}',\lambda') \{ a(\vec{k},\lambda), a^{\dagger}(\vec{k}',\lambda') \}$$

$$+ v(\vec{k},\lambda)\, v^{*}(+\vec{k}',\lambda') \{ b^{\dagger}(-\vec{k},-\lambda), b(-\vec{k}',-\lambda') \}$$

$$= \delta_{\vec{k}\vec{k}'}\, \delta_{\lambda\lambda'} \left\{ |u(\vec{k},\lambda)|^2 + |v(\vec{k},\lambda)|^2 \right\}$$

Unitaridade:

$$|u(\vec{k},\lambda)|^2 + |v(\vec{k},\lambda)|^2 = |x(\vec{k},\lambda)|^2 + |y(\vec{k},\lambda)|^2 = 1$$

Escrevendo em forma matricial:

$$\begin{pmatrix} C(\vec{k},\lambda) \\ d^{+}(\vec{k},\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{\vec{k}\lambda} & v_{\vec{k}\lambda} \\ x_{\vec{k},\lambda} & y_{\vec{k}\lambda} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a(\vec{k},\lambda) \\ b^{+}(-\vec{k},-\lambda) \end{pmatrix}$$

A unitaridade também fornece

$$u_{\vec{k}\lambda} x^{*}_{\vec{k}\lambda} + v_{\vec{k}\lambda} y^{*}_{\vec{k}\lambda} = 0$$

$$u_{\vec{k}\lambda} v^{*}_{\vec{k}\lambda} + x_{\vec{k}\lambda} y^{*}_{\vec{k}\lambda} = 0$$

$$|u_{k\lambda}|^2 + |x_{\vec{k}\lambda}|^2 = |v_{k\lambda}|^2 + |y_{\vec{k}\lambda}|^2 = 1$$

$$u_{\vec{k}\lambda} y_{\vec{k}\lambda} - v_{\vec{k}\lambda} x_{\vec{k}\lambda} = 1$$

Para encontrar explicitamente a transformação e a equação de autovalores, exigimos que o Hamiltoniano seja diagonal nos novos operadores, na forma:

$$\mathcal{H} = \sum_{\vec{k}\lambda} \left\{ E^{c}_{\vec{k}\lambda}\, c^{+}(\vec{k}\lambda) c(\vec{k}\lambda) + E^{d}_{\vec{k}\lambda}\, d^{+}(\vec{k}\lambda) d(\vec{k}\lambda) \right\} + \text{cte}.$$

As equações de movimento neste caso fornecem:

$$\left[\mathcal{H}, c(\vec{k},\lambda)\right] = \sum_{\vec{k}',\lambda'} E^{c}_{\vec{k}'\lambda'} \left[c^{+}(\vec{k}'\lambda') c(\vec{k}'\lambda'), c(\vec{k},\lambda) \right] =$$

$$= \sum_{\vec{k}',\lambda'} E^{c}_{\vec{k}',\lambda'} \left[c^{+}(\vec{k}',\lambda') \left\{ c(\vec{k}',\lambda'), c(\vec{k},\lambda) \right\} - \left\{ c^{+}(\vec{k}'\lambda'), c(\vec{k}\lambda) \right\} c(\vec{k}'\lambda') \right]$$

$$= -E^{c}_{\vec{k}\lambda}\, c(\vec{k},\lambda)$$

e no caso de um operador de criação:

$$\left[\hat{\mathcal{H}}, c^{+}(\vec{k},\lambda)\right] = \epsilon\, c^{+}(\vec{k},\lambda) \quad ,$$

onde ϵ é o autovalor. O comutador tem que ser calculado explicitamente:

$$\left[\hat{\mathcal{H}}, c(\vec{k}\lambda)\right] = u(\vec{k}\lambda)\left[\hat{\mathcal{H}}, a(\vec{k}\lambda)\right] + v(\vec{k}\lambda)\left[\hat{\mathcal{H}}, b^{+}(-\vec{k},-\lambda)\right]$$

$$= u\left\{-\hbar ck\, a(\vec{k},\lambda) - mc^2\varphi\, b^{+}(-\vec{k},-\lambda)\right\} +$$

$$+ v\left\{\hbar ck\, b^{+}(-\vec{k},-\lambda) - mc^2\varphi\, a(\vec{k},\lambda)\right\}$$

$$= -\epsilon\, u\, a(\vec{k}\lambda) - \epsilon\, v\, b^{+}(-\vec{k},-\lambda),$$

identificando coeficientes obtemos:

$$+\hbar ck\, u + mc^2\varphi\, v = +\epsilon u$$

$$+mc^2\varphi\, u - \hbar ck\, v = +\epsilon v$$

ou

$$\begin{cases} (\hbar ck - \epsilon)u + mc^2\varphi\, v = 0 \\ mc^2\varphi\, u + (-\hbar ck - \epsilon)v = 0 \end{cases}$$

e a eq. de autovalores fornece:

$$(\hbar ck - \epsilon)(-\hbar ck - \epsilon) - m^2c^4\varphi^2 = 0$$

$$\epsilon^2 - (\hbar ck)^2 - m^2c^4 = 0 \Rightarrow \epsilon^2 = m^2c^4 + (\hbar ck)^2$$

com autovalores:

$$\epsilon(\vec{k}) = \pm \sqrt{m^2c^4 + \hbar^2c^2k^2}$$

que não dependem da helicidade λ, nem da fase φ.

Escolhendo (u, v) como reais,

$$\begin{cases} u(\vec{k},\lambda) = \cos\theta_{\vec{k}\lambda} \\ v(\vec{k},\lambda) = -\operatorname{sen}\theta_{\vec{k}\lambda} \end{cases},$$

a matriz da transformação será:

$$\begin{pmatrix} c(\vec{k},\lambda) \\ d^{\dagger}(\vec{k},\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_{\vec{k}\lambda} & -\operatorname{sen}\theta_{\vec{k}\lambda} \\ \operatorname{sen}\theta_{\vec{k}\lambda} & \cos\theta_{\vec{k}\lambda} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a(\vec{k},\lambda) \\ b^{\dagger}(-\vec{k},-\lambda) \end{pmatrix}$$

Escolhendo a energia como sendo positiva, a equação de autovalores fica

$$(\hbar ck - \epsilon_{\vec{k}})\, u_{\vec{k}\lambda} + mc^2\varphi\, v_{\vec{k}\lambda} = 0$$

$$\frac{v_{k\lambda}}{u_{k\lambda}} = \frac{\epsilon_{\vec{k}} - \hbar ck}{mc^2\varphi} = -\frac{\operatorname{sen}\theta_{k\lambda}}{\cos\theta_{k\lambda}} = -\tan\theta_{k\lambda}$$

Temos as relações:

$$(\epsilon_{\vec{k}} - \hbar ck)(\epsilon_k + \hbar ck) = \epsilon_k^2 - (\hbar ck)^2 = m^2c^4$$

$$1 = u^2 + v^2 = u^2\left[1 + \frac{(\epsilon_k - \hbar ck)^2}{m^2c^4}\right] = u^2\left[1 + \frac{(\epsilon_k - \hbar ck)}{\epsilon_k + \hbar ck}\right]$$

$$1 = u^2 \left[\frac{\epsilon_k + \cancel{\hbar c k} + \epsilon_k - \cancel{\hbar c k}}{\epsilon_k + \hbar c k} \right] = u^2 \left(\frac{2\epsilon_k}{\epsilon_k + \hbar c k} \right)$$

Dai:

$$\boxed{u_{\vec{k}\lambda} = \sqrt{\frac{\epsilon_k + \hbar c k}{2\epsilon_k}}}$$

$$v_{\vec{k}\lambda} = \varphi \frac{\epsilon_k - \hbar c k}{mc^2} u_{\vec{k}\lambda} = \varphi \frac{\epsilon_k - \hbar c k}{mc^2} \sqrt{\frac{\epsilon_k + \hbar c k}{2\epsilon_k}}$$

$$= \varphi \sqrt{\frac{(\epsilon_k - \hbar c k)^2 (\epsilon_k + \hbar c k)}{m^2 c^4 \cdot 2\epsilon_k}} = \varphi \sqrt{\frac{\epsilon_k - \hbar c k}{2\epsilon_k}}$$

$$\boxed{v_{\vec{k}\lambda} = \varphi \sqrt{\frac{\epsilon_k - \hbar c k}{2\epsilon_k}}}$$

$$\begin{cases} c(\vec{k}\lambda) = \sqrt{\dfrac{\epsilon_k + \hbar c k}{2\epsilon_k}}\, a(\vec{k},\lambda) + \varphi \sqrt{\dfrac{\epsilon_k - \hbar c k}{2\epsilon_k}}\, b^\dagger(-\vec{k},-\lambda) \\[2ex] d^\dagger(\vec{k},\lambda) = -\varphi \sqrt{\dfrac{\epsilon_k - \hbar c k}{2\epsilon_k}}\, a(\vec{k},\lambda) + \sqrt{\dfrac{\epsilon_k + \hbar c k}{2\epsilon_k}}\, b^\dagger(-\vec{k},-\lambda) \end{cases}$$

Estes operadores não tem a chiralidade definida. Temos ainda uma fase φ não determinada. Esta transformação pode ser invertida mudando de sinal o ângulo $\theta_{\vec{k}\lambda}$

$$\begin{pmatrix} a(\vec{k},\lambda) \\ b^\dagger(-\vec{k},-\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_{\vec{k}\lambda} & \operatorname{sen}\theta_{\vec{k}\lambda} \\ -\operatorname{sen}\theta_{\vec{k}\lambda} & \cos\theta_{\vec{k}\lambda} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} c(\vec{k},\lambda) \\ d^\dagger(\vec{k},\lambda) \end{pmatrix}$$

- Autovalor de energia positiva:

$$\epsilon(\vec{k}) = \sqrt{m^2c^4 + \hbar^2c^2k^2} \equiv \epsilon_{\vec{k}}$$

com autovetor:

$$C(\vec{k},\lambda) = \sqrt{\frac{\epsilon_k + \hbar ck}{2\epsilon_k}}\, a(\vec{k},\lambda) +$$

$$+ \varphi \sqrt{\frac{\epsilon_k - \hbar ck}{2\epsilon_k}}\, b^{\dagger}(-\vec{k},-\lambda)$$

- Autovalor de energia negativa:

$$\bar{\epsilon}(\vec{k}) = -\sqrt{m^2c^4 + \hbar^2c^2k^2} = -\epsilon(\vec{k})$$

com autovetor

$$d^{\dagger}(\vec{k},\lambda) = -\varphi \sqrt{\frac{\epsilon_k - \hbar ck}{2\epsilon_k}}\, a(\vec{k},\lambda) +$$

$$+ \sqrt{\frac{\epsilon_k + \hbar ck}{2\epsilon_k}}\, b^{\dagger}(-\vec{k},-\lambda)$$

Calculamos agora o Hamiltoniano:

$$a^\dagger(\vec{k}\lambda)\, a(\vec{k}\lambda) = \left(\cos\theta\, c^\dagger_{\vec{k}\lambda} + \operatorname{sen}\theta\, d_{\vec{k}\lambda}\right)\left(\cos\theta\, c_{k\lambda} + \operatorname{sen}\theta\, d^\dagger_{k\lambda}\right)$$

$$= \cos^2\theta\, c^\dagger_{k\lambda} c_{k\lambda} + \operatorname{sen}^2\theta\, d_{\vec{k}\lambda} d^\dagger_{\vec{k}\lambda} + \cos\theta \operatorname{sen}\theta \left(c^\dagger_{k\lambda} d^\dagger_{k\lambda} + d_{k\lambda} c_{k\lambda}\right)$$

$$b^\dagger(-\vec{k},-\lambda)\, b(-\vec{k},-\lambda) = \left(-\operatorname{sen}\theta\, c_{k\lambda} + \cos\theta\, d^\dagger_{k\lambda}\right)\left(-\operatorname{sen}\theta\, c^\dagger_{k\lambda} + \cos\theta\, d_{k\lambda}\right)$$

$$= \operatorname{sen}^2\theta\, c_{k\lambda} c^\dagger_{k\lambda} + \cos^2\theta\, d^\dagger_{k\lambda} d_{k\lambda} - \operatorname{sen}\theta\cos\theta \left(c_{k\lambda} d_{k\lambda} + d^\dagger_{k\lambda} c^\dagger_{k\lambda}\right)$$

Assim

$$\sum_{\vec{k},\lambda} \hbar c k \left[a^\dagger_{k\lambda} a_{k\lambda} + b^\dagger_{k\lambda} b_{k\lambda} - 1\right]$$

$$= \sum_{\vec{k},\lambda} \hbar c k \Big[\left(\cos^2\theta_{k\lambda} - \operatorname{sen}^2\theta_{k\lambda}\right) c^\dagger_{k\lambda} c_{k\lambda} + \operatorname{sen}^2\theta_{k\lambda}$$

$$+ \left(\cos^2\theta_{k\lambda} - \operatorname{sen}^2\theta_{k\lambda}\right) d^\dagger_{k\lambda} d_{k\lambda} + \operatorname{sen}^2\theta_{k\lambda} - 1$$

$$- 2 \operatorname{sen}\theta_{k\lambda} \cos\theta_{k\lambda} \left(c_{k\lambda} d_{k\lambda} + d^\dagger_{k\lambda} c^\dagger_{k\lambda}\right)\Big]$$

Os outros termos:

$$a^\dagger_{k\lambda}\, b^\dagger_{-k,\bar{\lambda}} = \left(\cos\theta\, c^\dagger_{k\lambda} + \operatorname{sen}\theta\, d_{k\lambda}\right)\left(-\operatorname{sen}\theta\, c_{k\lambda} + \cos\theta\, d^\dagger_{k\lambda}\right)$$

$$= -\operatorname{sen}\theta\cos\theta\, c^\dagger_{k\lambda} c_{k\lambda} + \operatorname{sen}\theta\cos\theta\, d_{k\lambda} d^\dagger_{k\lambda}$$

$$+ \cos^2\theta\, c^\dagger_{k\lambda} d^\dagger_{k\lambda} - \operatorname{sen}^2\theta\, d_{k\lambda} c_{k\lambda}$$

$$b_{-\vec{k},\bar{\lambda}}\, a_{\vec{k}\lambda} = \left(-\operatorname{sen}\theta_{k\lambda}\, c^\dagger_{k\lambda} + \cos\theta_{k\lambda}\, d_{k\lambda}\right)\left(\cos\theta\, c_{k\lambda} + \operatorname{sen}\theta\, d^\dagger_{k\lambda}\right)$$

$$= -\operatorname{sen}\theta\cos\theta\, c^\dagger_{k\lambda} c_{k\lambda} + \operatorname{sen}\theta\cos\theta\, d_{k\lambda} d^\dagger_{k\lambda}$$

$$- \operatorname{sen}^2\theta\, c^\dagger_{k\lambda} d^\dagger_{k\lambda} + \cos^2\theta\, d_{k\lambda} c_{k\lambda}$$

e somando:

$$mc^2\varphi \sum_{\vec{k}\lambda} \left(a^{+} b_{-}^{+} + b_{-} a \right)$$

$$= \sum_{\vec{k}\lambda} mc^2\varphi \Big\{ -2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\; c_{k\lambda}^{+} c_{k\lambda} - 2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\; d_{k\lambda}^{+} d_{k\lambda} + 2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta$$

$$+ \left(\mathrm{sen}^2\theta - \cos^2\theta\right)\left(c_{k\lambda} d_{k\lambda} + d_{k\lambda}^{+} c_{k\lambda}^{+} \right) \Big\}$$

Temos que calcular as fórmulas do ângulo duplo:

$$\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta = \cos 2\theta = \frac{\epsilon_k + \hbar c k}{2\epsilon_k} - \frac{\epsilon_k - \hbar c k}{2\epsilon_k} = \frac{\hbar c k}{\epsilon_k}$$

$$2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta = \mathrm{sen}\,2\theta = -2\varphi\sqrt{\frac{(\epsilon_k + \hbar c k)(\epsilon_k - \hbar c k)}{(2\epsilon_k)^2}}$$

$$= -\varphi\, 2\sqrt{\frac{m^2c^4}{(2\epsilon_k)^2}} = -2\varphi\frac{mc^2}{2\epsilon_k} = -\varphi\frac{mc^2}{\epsilon_k}$$

Assim o Hamiltoniano fica:

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{\vec{k},\lambda} \hbar c k \left[\frac{\hbar c k}{\epsilon_k}\left(c_{k\lambda}^{+} c_{k\lambda} + d_{k\lambda}^{+} d_{k\lambda} \right) + \varphi\frac{mc^2}{\epsilon_k}\left(c_{k\lambda} d_{k\lambda} + d_{k\lambda}^{+} c_{k\lambda}^{+} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\hbar c k}{\epsilon_k} \right] +$$

$$+ \sum_{\vec{k},\lambda} mc^2\varphi \left[\varphi\frac{mc^2}{\epsilon_k}\left(c_{k\lambda}^{+} c_{k\lambda} + d_{k\lambda}^{+} d_{k\lambda} \right) - \frac{\hbar c k}{\epsilon_k}\left(c_{k\lambda} d_{k\lambda} + d_{k\lambda}^{+} c_{k\lambda}^{+} \right) - \right.$$

$$\left. + \varphi\frac{mc^2}{\epsilon_k} \right]$$

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{\vec{k},\lambda} \epsilon_{\vec{k}} \left[c^{\dagger}_{\vec{k}\lambda} c_{\vec{k}\lambda} + d^{\dagger}_{\vec{k}\lambda} d_{\vec{k}\lambda} - 1 \right]$$

$$= \sum_{\vec{k},\lambda} \left[\epsilon_{\vec{k}}\, c^{\dagger}(\vec{k}\lambda) c(\vec{k}\lambda) - \epsilon_{\vec{k}}\, d(\vec{k}\lambda) d^{\dagger}(\vec{k}\lambda) \right]$$

O Hamiltoniano não é positivo-definido por causa das soluções com energia negativa. Para resolver esta dificuldade, usamos a hipótese de Dirac, que esses estados estão todos ocupados no vácuo. Neste caso a energia do estado fundamental diverge

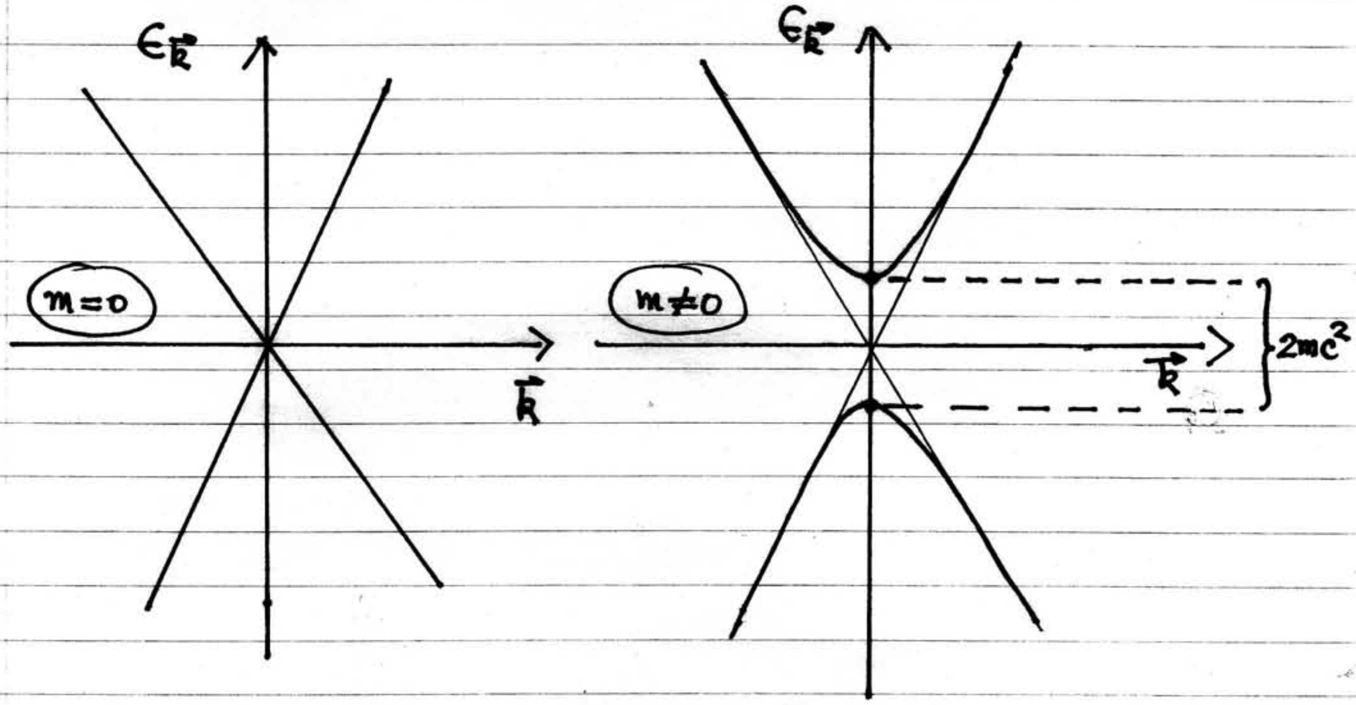
$$E_0 = - \sum_{\vec{k}\lambda} \epsilon_{\vec{k}} \longrightarrow -\infty ,$$

pois o espectro não é inferiormente limitado. Mas esta energia não é observável, e só interessam as diferenças em relação àquela. Em vez de falar que o operador $d^{\dagger}(\vec{k}\lambda)$ cria um buraco no mar de Dirac, optaremos por dizer que ele cria uma antipartícula, o positron, de energia positiva. Escrevemos o Hamiltoniano físico como sendo:

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{\vec{k}\lambda} \epsilon_{\vec{k}} :\left[c^{\dagger}(\vec{k}\lambda) c(\vec{k}\lambda) - d(\vec{k}\lambda) d^{\dagger}(\vec{k}\lambda) \right]:$$

ou:

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k},\lambda} \epsilon_{\vec{k}} \left(c^{\dagger}_{\vec{k}\lambda} c_{\vec{k}\lambda} + d^{\dagger}_{\vec{k}\lambda} d_{\vec{k}\lambda} \right)$$



Para o campo livre de Dirac massivo aparece um gap Δ no espectro, de tamanho $\Delta = 2mc^2$, igual à energia mínima necessária para criar um par eletron-positron.

A transformação de Bogolubov redefine o vácuo em termo dos novos operadores de partícula e anti-partícula:

$$c(\vec{k},\lambda)\,|0\rangle = 0\,, \quad d(\vec{k},\lambda)\,|0\rangle = 0$$

▶ Pergunta: Como se relaciona este vácuo com o antigo vácuo dos operadores $a_{\vec{k}\lambda}$, $b_{\vec{k}\lambda}$?

A helicidade e a chiralidade não podem ser definidas simultaneamente, quando $m \neq 0$. O operador de campo fica:

$$\psi_s = \sum_{\vec{k}\lambda} \left[\langle \vec{r} | \vec{k} \rangle \langle s | \lambda\lambda \rangle a_{\vec{k}\lambda} + \langle \vec{k} | \vec{r} \rangle \langle s | -\lambda\lambda \rangle b^{+}_{\vec{k}\lambda} \right]$$

$$= \sum_{\vec{k},\lambda} \Big\{ \langle \vec{r} | \vec{k} \rangle \langle s | \lambda\lambda \rangle \left(\cos\theta_{k\lambda}\, c_{\vec{k}\lambda} + \operatorname{sen}\theta_{k\lambda}\, d^{+}_{\vec{k}\lambda} \right) +$$

$$+ \langle \vec{k} | \vec{r} \rangle \langle s | -\lambda\lambda \rangle \left(-\operatorname{sen}\theta_{k\lambda}\, c(-\vec{k},-\lambda) + \cos\theta_{k\lambda}\, d^{+}(-\vec{k},-\lambda) \right) \Big\}$$

no 2º termo trocamos $\vec{k} \to -\vec{k}$, e $\lambda \to -\lambda$:

$$= \sum_{\vec{k},\lambda} \Big\{ \langle \vec{r} | \vec{k} \rangle \langle s | \lambda\lambda \rangle \left(\cos\theta\, c_{\vec{k}\lambda} + \operatorname{sen}\theta_{k\lambda}\, d^{+}_{\vec{k}\lambda} \right) +$$

$$+ \langle \vec{r} | \vec{k} \rangle \langle s | \lambda, -\lambda \rangle \left(-\operatorname{sen}\theta_{k\lambda}\, c_{\vec{k}\lambda} + \cos\theta_{k\lambda}\, d^{+}_{k\lambda} \right) \Big\}$$

$$\psi_s(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} \langle \vec{r} | \vec{k} \rangle \sum_{\lambda} \Big\{ \left[\cos\theta_{k\lambda} \langle s | \lambda\lambda \rangle - \operatorname{sen}\theta_{k\lambda} \langle s | \lambda, -\lambda \rangle \right] c_{\vec{k}\lambda} +$$

$$+ \left[\operatorname{sen}\theta_{\vec{k}\lambda} \langle s | \lambda\lambda \rangle + \cos\theta_{k\lambda} \langle s | \lambda, -\lambda \rangle \right] d^{+}_{\vec{k}\lambda} \Big\}$$